

Földrengésvédelem – Példák 2.

Síkbeli rezgések, válaszspektrum- módszer, helyettesítő terhek módszere

Vető Dániel

Tartószerkezet-rekonstrukciós Szakmérnöki Képzés

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Szilárdságtani és Tartószerkezeti Tanszék

2017. május 18.

A példák kidolgozásához felhasznált irodalom:

- [1] Deák Gy. – Erdélyi T. – Fernezelyi S. – Kollár L. – Visnovitz Gy.: *Terhek és hatások – Tervezés az Eurocode alapján*. Business Media Magyarország Kft., Budaörs, 2006.
- [2] Dulácska E.: *Kisokos statikusoknak. Segédlet tartószerkezetek tervezéséhez. 2., javított kiadás*. Artifex Kiadó, Budapest, 2013.
- [3] Dulácska E. – Joó A. – Kollár L.: *Tartószerkezetek tervezése földrengési hatásokra – Az Eurocode alapján*. Akadémiai Kiadó, Budapest, 2008.
- [4] Dr. Kollár L. – Dr. Dulácska E. – Dr. Csák B. – Dr. Sajtos I. – Joó A.: *Eurocode 8 tanfolyam vetített anyaga*. BME Szilárdságtani és Tartószerkezeti Tanszék, 2008.
- [5] Dr. Sajtos I. – Dr. Hegyi D. – Dr. Sipos A. Á. – Vető D. – Merle I. – Orbán I.: *EC 6-8 – Példatár – Falazott szerkezetek méretezése – Falazott szerkezetű épületek méretezése földrengésre*. Wienerberger Zrt., Budapest, 2010.

Tartalom:

1. példa: egyszintes keret

2. példa: kétszintes keret

Rezgésidők és rezgésalakok kiszámítása (sajátérték-feladat megoldása)

Földrengésterhek az egyes rezgésalakokból (modálanalízis)

Helyettesítő terhek módszere

3. példa: négyszintes keret

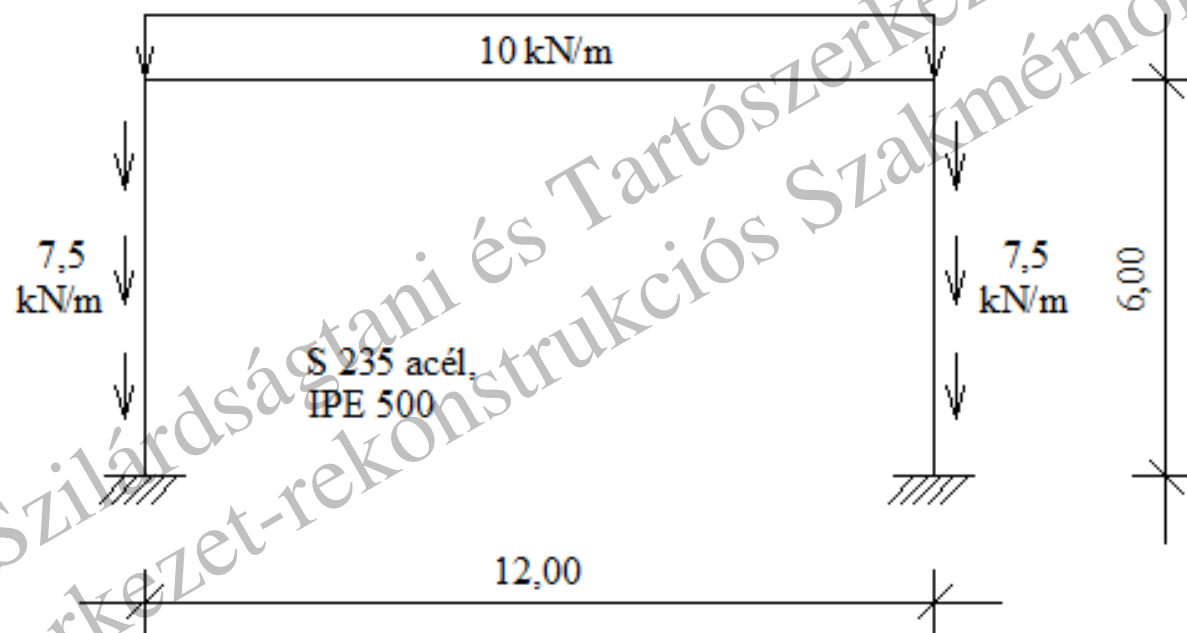
Földrengésterhek az egyes rezgésalakokból (modálanalízis)

Helyettesítő terhek módszere

VEM megoldás

1. példa: egyszintes keret

Szerkezet méretei, terhei:



1. példa: egyszintes keret

Földrengési alapadatok:

földrengés típusa: 1. típus

talajosztály: B osztály

talajszorzó: $S = 1,2$

fontossági osztály: II. osztály

fontossági tényező: $\gamma_1 = 1,0$

viselkedési tényező: $q = 1,5$

szeizmikus zóna: 4. zóna

talajgyorsulás: $a_g = \gamma_1 \cdot a_{gR} = 1,0 \cdot 0,14 \cdot 9,81 = 1,37 \text{ m/s}^2$

1. példa: egyszintes keret

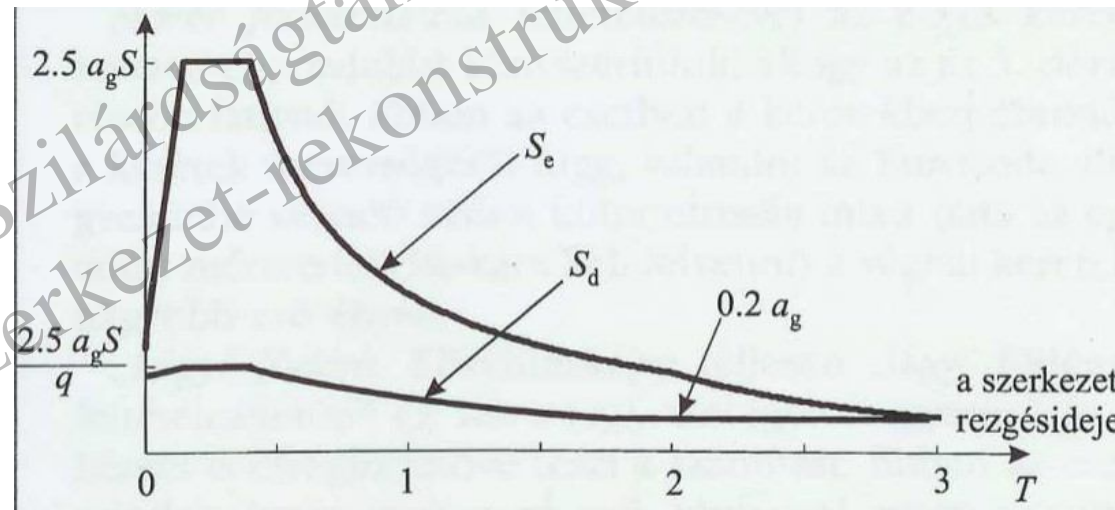
Tervezési gyorsulási válaszspektrum, alapnyíróerő:

$$T_B < T < T_C$$

$$0,15 < 0,319 < 0,5$$

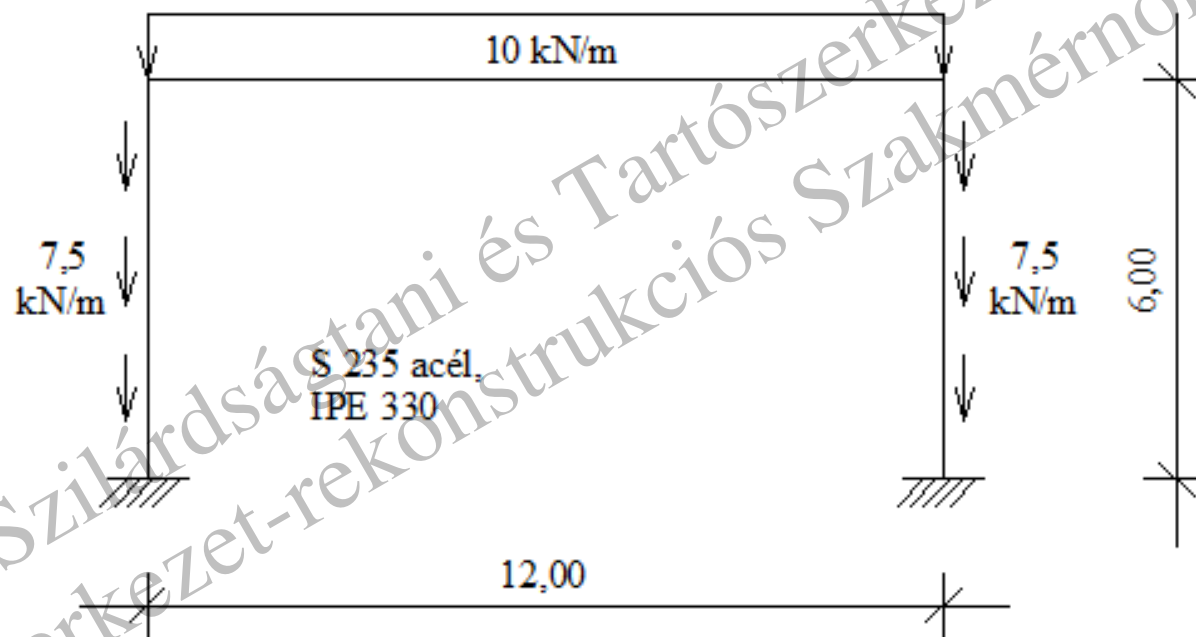
$$S_d(T) = a_g S \frac{2,5}{q} = 1,37 \cdot 1,2 \cdot \frac{2,5}{1,5} = 2,75 \text{ m/s}^2$$

$$F_b = m S_d = 16500 \cdot 2,75 = 45380 \text{ N} = 45,38 \text{ kN}$$



1. példa: egyszintes keret

Szerkezet méretei, terhei (keresztmetszetek inerciája negyedakkora):



1. példa: egyszintes keret

Földrengési alapadatok:

földrengés típusa: 1. típus

talajosztály: B osztály

talajszorzó: $S = 1,2$

fontossági osztály: II. osztály

fontossági tényező: $\gamma_1 = 1,0$

viselkedési tényező: $q = 1,5$

szeizmikus zóna: 4. zóna

talajgyorsulás: $a_g = \gamma_1 \cdot a_{gR} = 1,0 \cdot 0,14 \cdot 9,81 = 1,37 \text{ m/s}^2$

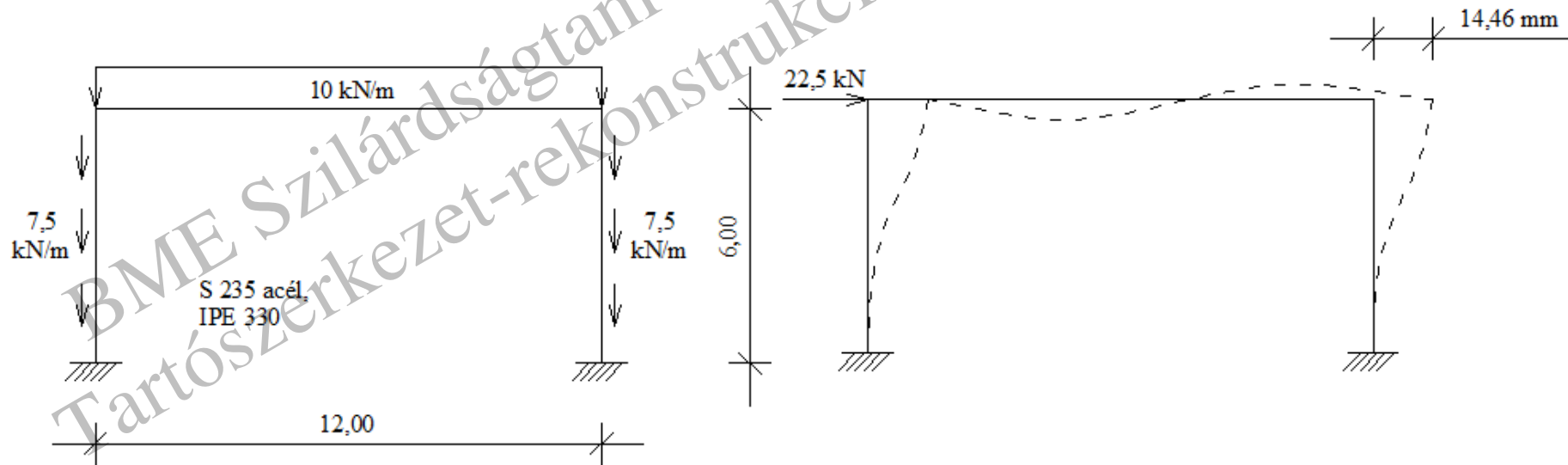
1. példa: egyszintes keret

Tömeg, merevség, rezgésidő:

$$m = 12 \cdot 1000 + 2 \cdot 3 \cdot 750 = 16500 \text{ kg}$$

$$k = \frac{22500}{14,46 \cdot 10^{-3}} = 1,56 \cdot 10^6 \text{ N / m}$$

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{16500}{1,56 \cdot 10^6}} = 0,647 \text{ s}$$



1. példa: egyszintes keret

Tervezési gyorsulási válaszspektrum, alapnyíróerő:

$$T_C < T < T_D$$

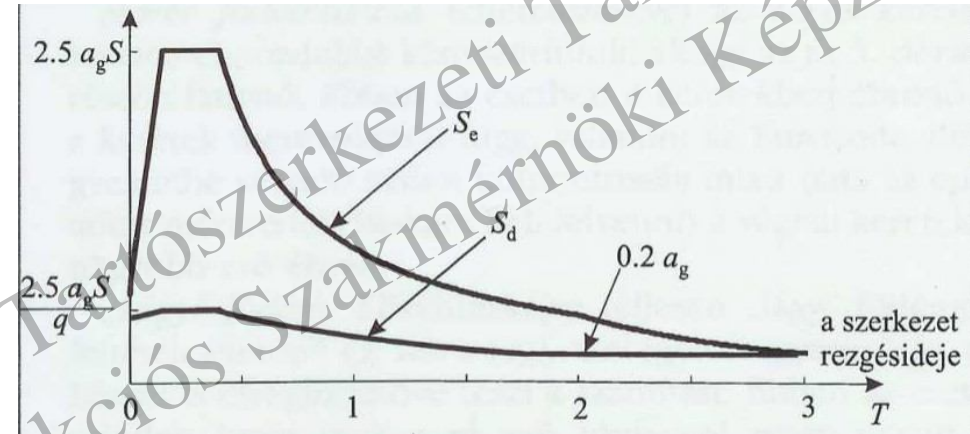
$$0,5 < 0,647 < 2,0$$

$$S_d(T) = \max \left\{ a_g S \frac{2,5 T_C}{q T}, 0,2 a_g \right\} =$$

$$= \max \left\{ 1,37 \cdot 1,2 \cdot \frac{2,5 \cdot 0,5}{1,5 \cdot 0,647}, 0,2 \cdot 1,37 \right\} =$$

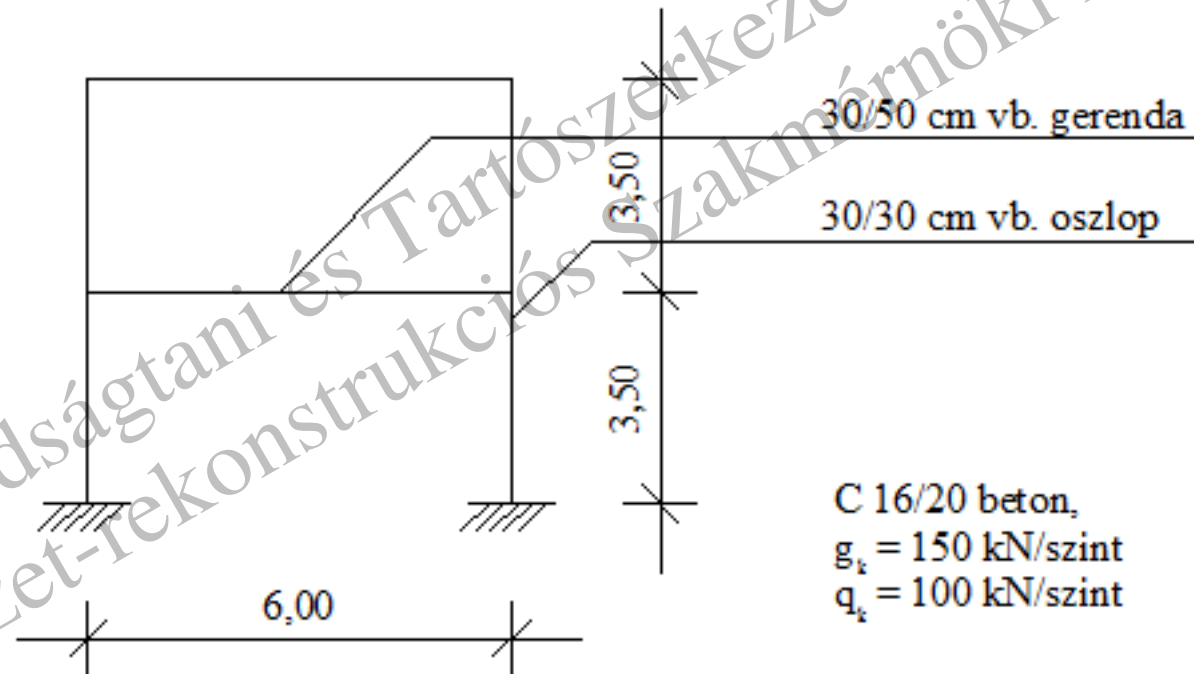
$$= \max \left\{ 2,12, 0,28 \right\} = 2,12 m / s^2$$

$$F_b = m S_d = 16500 \cdot 2,12 = 34940 N = 34,94 kN < 45,38 kN$$



2. példa: kétszintes keret

Szerkezet méretei, terhei:



2. példa: kétszintes keret

Földrengési alapadatok:

földrengés típusa: 1. típus

talajosztály: B osztály

talajszorzó: $S = 1,2$

fontossági osztály: II. osztály

fontossági tényező: $\gamma_1 = 1,0$

viselkedési tényező: $q = 1,5$

szeizmikus zóna: 4. zóna

talajgyorsulás: $a_g = \gamma_1 \cdot a_{gR} = 1,0 \cdot 0,14 \cdot 9,81 = 1,37 \text{ m/s}^2$

2. példa: kétszintes keret

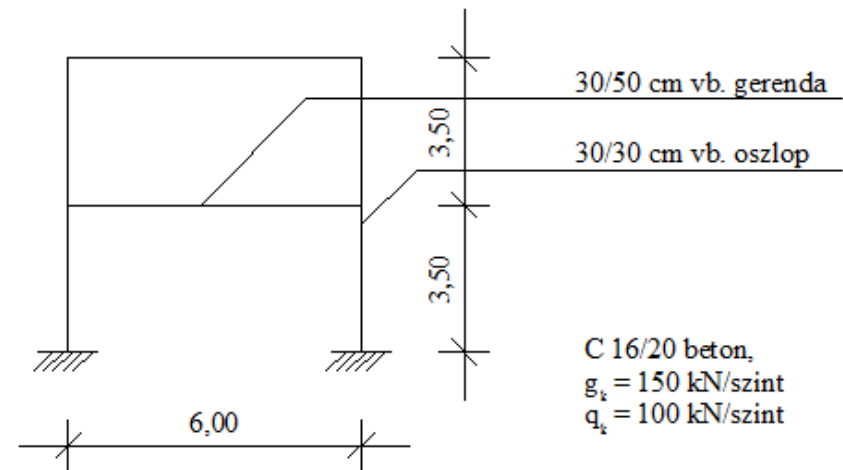
Beton rugalmassági modulusa, oszlop és gerenda inerciája, egy szint tömege:

$$E_{C16/20} = 29 \cdot 10^9 \text{ N / m}^2$$

$$I_c = 0,5 \cdot \frac{0,3 \cdot 0,3^3}{12} = 3,38 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$$

$$I_b = 0,5 \cdot \frac{0,3 \cdot 0,5^3}{12} = 1,56 \cdot 10^{-3} \text{ m}^4$$

$$m = (g_k + \psi_2 q_k) \cdot 100 = (150 + 0,5 \cdot 100) \cdot 100 = 20000 \text{ kg}$$



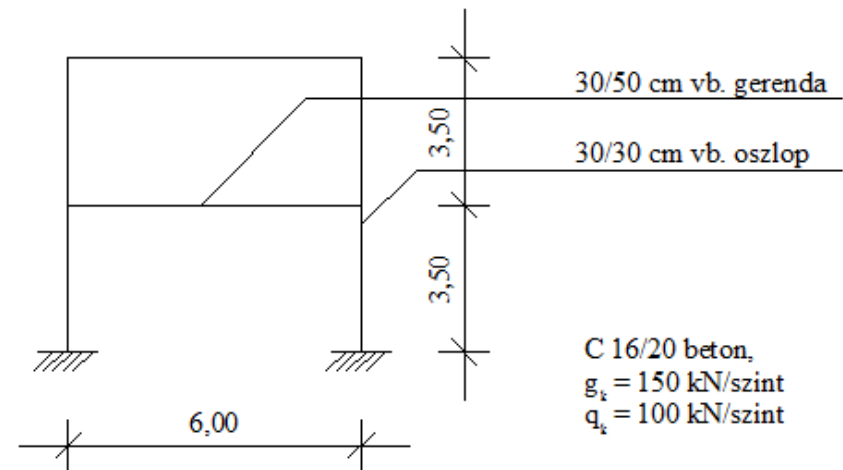
2. példa: kétszintes keret

Nyírási deformációt végző rúdként modellezett épület nyírási merevsége:

$$\frac{1}{\hat{S}} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n-1} \frac{12 \cdot EI_{bi}}{d_i h}} + \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{12 \cdot EI_{ci}}{h^2}} =$$

$$= \frac{1}{\frac{12 \cdot 29 \cdot 10^9 \cdot 1,56 \cdot 10^{-3}}{6 \cdot 3,50}} + \frac{1}{2 \cdot \frac{12 \cdot 29 \cdot 10^9 \cdot 3,38 \cdot 10^{-4}}{3,50^2}} = 9,08 \cdot 10^{-8} \frac{1}{N}$$

$$\hat{S} = 1,10 \cdot 10^7 N$$

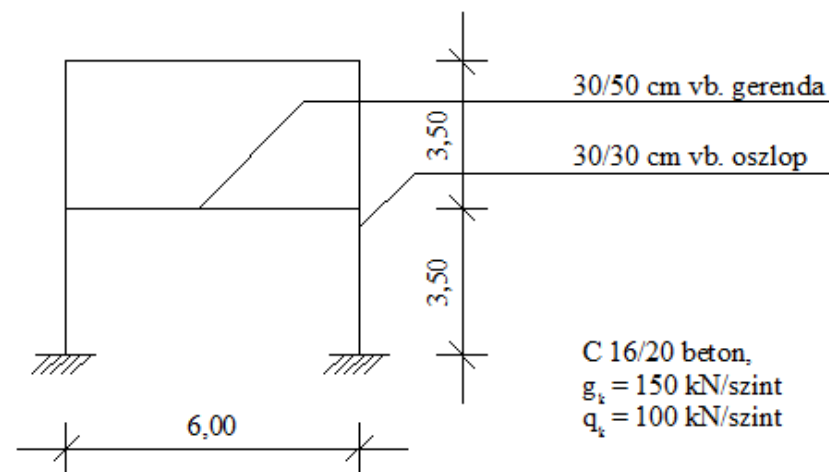


2. példa: kétszintes keret

Tömegmátrix, merevségi mátrix:

$$\underline{\underline{m}} = \begin{bmatrix} 20000 & 0 \\ 0 & 20000 \end{bmatrix} \text{kg}$$

$$\underline{\underline{k}} = \frac{\hat{S}}{h} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1,10 \cdot 10^7}{3,50} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6,29 & -3,14 \\ -3,14 & 3,14 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \frac{N}{m}$$



2. példa: kétszintes keret

Szabad rezgés alapegyenlete:

$$\underline{\underline{k}} \cdot \underline{u} + \underline{\underline{m}} \cdot \underline{\ddot{u}} = \underline{0}$$

a megoldást

$$\underline{u}(t) = \sin(\omega_n t) \underline{\phi}$$

alakban keressük, ez sajátérték-feladatra vezet

Szabad rezgést végző rendszer sajátérték-feladata:

$$(\underline{\underline{k}} - \omega_n^2 \underline{\underline{m}}) \underline{\phi} = \underline{0}$$

ω_n : sajátérték

$\underline{\phi}$: sajátvektor

2. példa: kétszintes keret

Sajátérték-feladat megoldása, sajátértékek:

$$\det(\underline{k} - \omega_n^2 \underline{m}) = 0$$

$$\det \begin{bmatrix} 6,29 \cdot 10^6 - \omega_n^2 \cdot 20000 & -3,14 \cdot 10^6 \\ -3,14 \cdot 10^6 & 3,14 \cdot 10^6 - \omega_n^2 \cdot 20000 \end{bmatrix} =$$

$$= (6,29 \cdot 10^6 - \omega_n^2 \cdot 20000) \cdot (3,14 \cdot 10^6 - \omega_n^2 \cdot 20000) - (-3,14 \cdot 10^6)^2 =$$

$$= (\omega_n^2)^2 - 473 \cdot \omega_n^2 + 2,49 \cdot 10^4 = 0$$

$$(\omega_n^2)_{1,2} = \frac{473 \pm \sqrt{473^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2,49 \cdot 10^4}}{2} = \begin{cases} 413 \\ 60,5 \end{cases}$$

$$T_{1,2} = \frac{2\pi}{\sqrt{(\omega_n^2)_{1,2}}} = \begin{cases} 0,309s \\ 0,808s \end{cases}$$

2. példa: kétszintes keret

Sajátérték-feladat megoldása, sajátvektorok:

$$\omega_n^2 = 413$$

$$\begin{bmatrix} -1,97 & -3,14 \\ -3,14 & -5,12 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \cdot \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\phi_1} = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,846 \\ -0,532 \end{bmatrix}$$

$$\omega_n^2 = 60,5$$

$$\begin{bmatrix} 5,08 & -3,14 \\ -3,14 & 1,93 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \cdot \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\phi_2} = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,525 \\ 0,851 \end{bmatrix}$$

2. példa: kétszintes keret

Modálmátrix, spektrálmátrix, rezgésidők:

$$\underline{\Phi} = \begin{bmatrix} 0,846 & 0,525 \\ -0,532 & 0,851 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\Omega}^2 = \begin{bmatrix} 413 & 0 \\ 0 & 60,5 \end{bmatrix}$$

$$\underline{T} = \begin{bmatrix} 0,309 \\ 0,808 \end{bmatrix} s$$

2. példa: kétszintes keret

Sajátérték-feladat egy lehetséges numerikus megoldásának vázlata:

tömegmátrix Cholesky-felbontása:

$$\underline{\underline{m}} = \underline{\underline{L}} \cdot \underline{\underline{L}}^T$$

segédmátrix előállítás:

$$\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{L}}^{-1} \cdot \underline{\underline{k}} \cdot \underline{\underline{L}}^{-1T}$$

segédmátrix sajátértékeinek és sajátvektorainak megkeresése:

$$(\underline{\underline{C}} - \lambda \underline{\underline{I}})\underline{\underline{\phi}} = \underline{\underline{0}}$$

ezek a sajátértékek és sajátvektorok megegyeznek az eredeti feladatéival

(megj.: a mátrix-invertálási lépés miatt ez a megoldási módszer sok szabadságfok és/vagy rosszul kondicionált feladat esetén nem működik megfelelően, de sok szoftver a feladatot (az általános sajátérték-feladatot) egy lépésben meg tudja oldani)

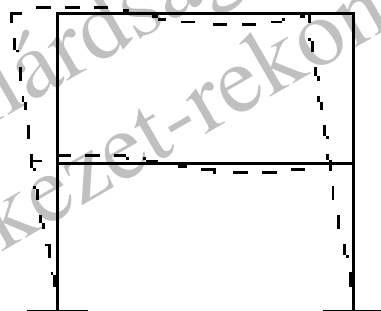
2. példa: kétszintes keret

Rezgésalakok (modálmátrix alapján):

$$\underline{\underline{\Phi}} = \begin{bmatrix} -0,525 & -0,851 \\ -0,851 & 0,525 \end{bmatrix}$$

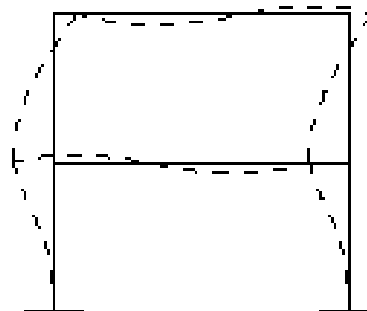
1. rezgésalak:

$$T_1 = 0,810\text{s}$$



2. rezgésalak:

$$T_2 = 0,310\text{s}$$

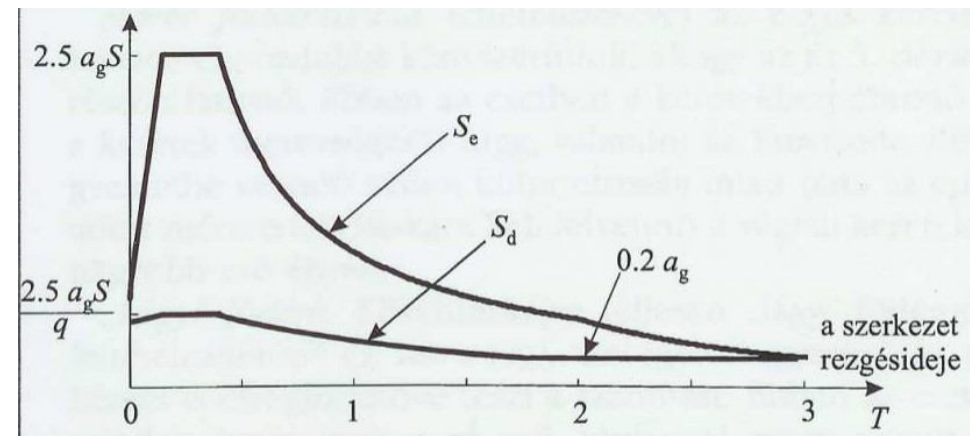


2. példa: kétszintes keret

Tervezési gyorsulási válaszspektrum:

$$S_d(T_1) = \max \left\{ \begin{array}{l} a_g S \frac{2,5 T_C}{q T} \\ 0,2 a_g \end{array} \right\} = \max \left\{ \begin{array}{l} 1,37 \cdot 1,2 \cdot \frac{2,5 \cdot 0,5}{1,5 \cdot 0,810} \\ 0,2 \cdot 1,37 \end{array} \right\} = \max \left\{ \begin{array}{l} 1,69 \\ 0,28 \end{array} \right\} =$$
$$= 1,69 m/s^2$$

$$S_d(T_2) = a_g S \frac{2,5}{q} = 1,37 \cdot 1,2 \cdot \frac{2,5}{1,5} = 2,74 m/s^2$$



2. példa: kétszintes keret

Effektív modális tömegek:

$$m_i^* = \frac{(\underline{\phi}_i^T \underline{m} \underline{\phi}_i)^2}{\underline{\phi}_i^T \underline{m} \underline{\phi}_i}$$

$$m_1^* = \frac{\left(\begin{bmatrix} -0,525 & -0,851 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20000 & 0 \\ 0 & 20000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)^2}{\begin{bmatrix} -0,525 & -0,851 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20000 & 0 \\ 0 & 20000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0,525 \\ -0,851 \end{bmatrix}} = 37877 \text{kg} \rightarrow 94,7\%$$

$$m_2^* = \frac{\left(\begin{bmatrix} -0,851 & 0,525 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20000 & 0 \\ 0 & 20000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)^2}{\begin{bmatrix} -0,851 & 0,525 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20000 & 0 \\ 0 & 20000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0,851 \\ 0,525 \end{bmatrix}} = 2123 \text{kg} \rightarrow 5,3\%$$

2. példa: kétszintes keret

Alapnyíróerők, földrengésterhek:

$$F_{bi} = m^*_i S_d(T_i)$$

$$F_{b1} = 37877 \cdot 1,69 = 64012 N = 64,01 kN$$

$$F_{b2} = 2123 \cdot 2,74 = 5817 N = 5,82 kN$$

$$\underline{p}_i = \underline{m\phi}_i \frac{\underline{\phi}_i^T \underline{m} \underline{\phi}_i}{\underline{\phi}_i^T \underline{m\phi}_i} S_d(T_i)$$

2. példa: kétszintes keret

Földrengésterhek:

$$\underline{p}_1 = \begin{bmatrix} 20000 & 0 \\ 0 & 20000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0,525 \\ -0,851 \end{bmatrix} \frac{\begin{bmatrix} -0,525 & -0,851 \\ -0,525 & -0,851 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20000 & 0 \\ 0 & 20000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} -0,525 & -0,851 \\ -0,525 & -0,851 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20000 & 0 \\ 0 & 20000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0,525 \\ -0,851 \end{bmatrix}}$$

$$\cdot 1,69 = \begin{bmatrix} 24,43 \\ 39,58 \end{bmatrix} kN$$

$$\underline{p}_2 = \begin{bmatrix} 20000 & 0 \\ 0 & 20000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0,851 \\ 0,525 \end{bmatrix} \frac{\begin{bmatrix} -0,851 & 0,525 \\ -0,851 & 0,525 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20000 & 0 \\ 0 & 20000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} -0,851 & 0,525 \\ -0,851 & 0,525 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20000 & 0 \\ 0 & 20000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0,851 \\ 0,525 \end{bmatrix}}$$

$$\cdot 2,74 = \begin{bmatrix} 15,19 \\ -9,38 \end{bmatrix} kN$$

2. példa: kétszintes keret

Helyettesítő nyíróerők:

$$\underline{F}_1 = \begin{bmatrix} 24,43 + 39,58 \\ 39,58 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 64,01 \\ 39,58 \end{bmatrix} kN$$

$$\underline{F}_2 = \begin{bmatrix} 15,19 - 9,38 \\ -9,38 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5,81 \\ -9,38 \end{bmatrix} kN$$

BME Szilárdságtani és Tartószerkezeti Tanszék
Tartószerkezet-rekonstrukciós Szakmérnöki Képzés

2. példa: kétszintes keret

Helyettesítő nyíróerők összegzése (ABSSUM):

1. szint:

$$F = |64,01| + |5,81| = 69,82kN$$

2. szint:

$$F = |39,58| + |-9,38| = 48,96kN$$

BME Szilárdságtani és Tartószerkezeti Tanszék
Tartószerkezet-rekonstrukciós Szakmérnöki Képzés

2. példa: kétszintes keret

Helyettesítő nyíróerők összegzése (SRSS):

1. szint:

$$F = \sqrt{64,01^2 + 5,81^2} = 64,27kN$$

2. szint:

$$F = \sqrt{39,58^2 + (-9,38)^2} = 40,68kN$$

BME Szilárdságtani és Tartószerkezeti Tanszék
Tartószerkezet-rekonstrukciós Szakmérnöki Képzés

2. példa: kétszintes keret

Helyettesítő nyíróerők összegzése (CQC):

$$\omega_1 = \sqrt{60,11} = 7,75\text{Hz}, \quad \omega_2 = \sqrt{411,39} = 20,28\text{Hz}$$

$$\alpha_{12} = \frac{7,75}{20,28} = 0,382, \quad \alpha_{21} = \frac{20,28}{7,75} = 2,617$$

$$\rho_{11} = \rho_{22} = 1$$

$$\rho_{12} = \frac{8 \cdot 0,05^2 \cdot (1 + 0,382) \cdot 0,382^{3/2}}{(1 - 0,382^2)^2 + 4 \cdot 0,05^2 \cdot 0,382 \cdot (1 + 0,382)^2} = 0,008861$$

$$\rho_{21} = \frac{8 \cdot 0,05^2 \cdot (1 + 2,617) \cdot 2,617^{3/2}}{(1 - 2,617^2)^2 + 4 \cdot 0,05^2 \cdot 2,617 \cdot (1 + 2,617)^2} = 0,008861$$

$$E_E = \sqrt{\sum_i \sum_j (E_{Ei} \rho_{ij} E_{Ej})}$$

