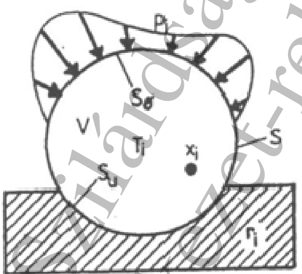
1_2. Bevezetés

Végeselem-módszer

Mechanikai feladatok matematikai modelljei



Ismeretlenek:

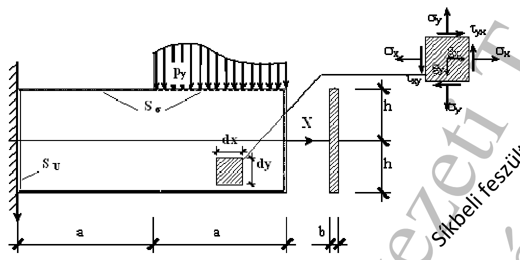
$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(x_i)$ $x_i \in V$ feszültség;
$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(x_i)$ $x_i \in V$ alakváltozás;
$u_i = u_i(x_i)$ $x_i \in V$ elmozdulás;
$r_i = r_i(x_i)$ $x_i \in S_u$ támaszerő;

Adott:

$g_i = g_i(x_i)$ $x_i \in V$ térfogati teher
$p_i = p_i(x_i)$ $x_i \in S_\sigma$ felületi teher
$v_i = v_i(x_i)$ $x_i \in S_u$ előírt peremelmozdulás

Mechanikai feladatok matematikai modelljei

A tárcsa peremérték-feladata:



- a tárcsa síkjában mért geometriai mérethez képest a vastagsági méret lényegesen kisebb,
- a tárcsa síkjára merőleges z irányban az alakváltozás nem gátolt,
- a z irányú σ_z normál feszültség, τ_{zx} illetve τ_{zy} nyírófeszültségek nem ébrednek,
- az xy síkbeli feszültségállapot komponensei függetlenek a z koordinátától.

Mechanikai feladatok matematikai modelljei

Egyensúlyi egyenletek:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + g_x = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + g_y = 0$$

Geometriai egyenletek:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x},$$

Anyagegyenletek:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \upsilon\,\sigma_y\right] \qquad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \upsilon\,\sigma_x\right]$$

Mechanikai feladatok matematikai modelljei

A tárcsa peremérték-feladata:

$$\left\{\begin{array}{l} G\left[\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{1}{1-2\upsilon}\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\right)\right]+g_x=0 \\ G\left[\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\dfrac{1}{1-2\upsilon}\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)\right]+g_y=0 \\ \text{+ geometriai (lényeges) peremfeltételek;} \\ \text{+ statikai (természetes) peremfeltételek.} \end{array}\right.$$

Lamé egyenletek!

Mechanikai feladatok matematikai modelljei

Egyensúlyi egyenletek:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x(x,y) \\ \sigma_y(x,y) \\ \tau_{xy}(x,y) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_x(x,y) \\ g_y(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{L}}^T \cdot \underline{\sigma}(x,y) + \underline{g}(x,y) = \underline{0}$$

Geometriai egyenletek:

$$\underline{\varepsilon}(x,y) = \begin{bmatrix} \varepsilon_x(x,y) \\ \varepsilon_y(x,y) \\ \gamma_{xy}(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{bmatrix}$$

$$\underline{\varepsilon}(x,y) = \underline{\underline{L}}\,\underline{u}(x,y) \cong \underline{\underline{L}}\,\underline{\underline{N}}(x,y)\,\underline{e} = \underline{\underline{B}}(x,y)\,\underline{e}$$

Anyagegyenletek:

$$\underline{\sigma}(x,y) = \begin{bmatrix} \sigma_x(x,y) \\ \sigma_y(x,y) \\ \tau_{xy}(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\upsilon^2} & \frac{\upsilon E}{1-\upsilon^2} & 0 \\ \frac{\upsilon E}{1-\upsilon^2} & \frac{E}{1-\upsilon^2} & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_x(x,y) \\ \varepsilon_y(x,y) \\ \gamma_{xy}(x,y) \end{bmatrix} = \underline{\underline{D}}\,\underline{\varepsilon}(x,y)$$

Mechanikai feladatok matematikai modelljei

A tárcsa peremérték-feladata:

$$\underline{\underline{L}}^T \cdot \underline{\underline{D}} \cdot \underline{\underline{L}} \cdot \underline{u} + \underline{g} = \underline{0}$$

Erős megoldás!

Lamé egyenletek!

+ geometriai (lényeges) peremfeltételek;

+ statikai (természetes) peremfeltételek.

Mechanikai feladatok matematikai modelljei

Potenciális energia állandóértékűségének tétele:

Lineárisan rugalmas test geometriailag lehetséges elmozdulás-alakváltozás rendszerei közül az a tényleges a test egyensúlyi helyzetének megfelelő, amelynél a teljes potenciális energia állandó értékű, stacionárius.

Külső erők potenciálja (Π_k):

$$\Pi_k = -\int_{V_e} \underline{u}^T \underline{g}\, dV - \int_{S_\sigma} \underline{u}^T \underline{p}\, dA$$

Belső erők potenciálja (Π_b):

$$\Pi_b = \int_{V_e} \int_{\varepsilon} \underline{\sigma}^T d\underline{\varepsilon}\, dV = \tfrac{1}{2} \int_{V_e} \underline{\varepsilon}^T \underline{\underline{D}}\, \underline{\varepsilon}\, dV$$

A teljes potenciális energia: $\Pi = \Pi_b + \Pi_k$

Egyensúly: $\delta \Pi = 0$

Mechanikai feladatok matematikai modelljei

Potenciális energia állandóértékűségének tétele:

Az eltolódásvektor approximációja:

$$\underline{u}(x,y)=\underline{\underline{N}}(x,y)\cdot\underline{e} \qquad \underline{\varepsilon}(x,y)=\underline{\underline{L}}\cdot\underline{u}(x,y)=\underline{\underline{L}}\cdot\underline{\underline{N}}(x,y)\cdot\underline{e}=\underline{\underline{B}}(x,y)\cdot\underline{e},$$

A teljes potenciális energia: $\Pi = \Pi_b + \Pi_k$

Egyensúly:

$$\delta\Pi\left(\underline{e}^T\right)=\frac{\partial\Pi}{\partial\underline{e}^T}\delta\underline{e}^T=0$$

$$\delta\underline{e}^T\left[\int_{V_e}\underline{\underline{B}}^T\underline{\underline{D}}\,\underline{\underline{B}}\,\underline{e}\,dV-\int_{V_e}\underline{\underline{N}}^T\underline{g}\,dV-\int_{S_\sigma}\underline{\underline{N}}^T\underline{p}\,dA\right]=0$$

$$\left[\int_{V_e}\underline{\underline{B}}^T\underline{\underline{D}}\,\underline{\underline{B}}\,\underline{e}\,dV-\int_{V_e}\underline{\underline{N}}^T\underline{g}\,dV-\int_{S_\sigma}\underline{\underline{N}}^T\underline{p}\,dA\right]=0$$

Mechanikai feladatok matematikai modelljei

Potenciális energia állandóértékűségének tétele:

A VEM elmozdulás-módszer szerinti alapegyenlete:

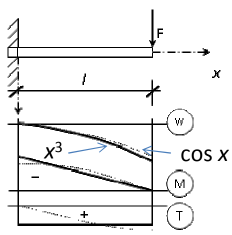
$$\underline{\underline{K}}_e\cdot\underline{e}=\underline{q}_e$$

Gyenge megoldás!

ahol:

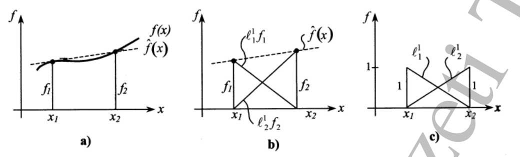
Merevségi mátrix: $\underline{\underline{K}}_e=\int_{V_e}\underline{\underline{B}}^T\underline{\underline{D}}\,\underline{\underline{B}}\;dV$

Tehervektor: $\underline{q}_e=\int_{V_e}\underline{\underline{N}}^T\underline{g}\,dV+\int_{S_\sigma}\underline{\underline{N}}^T\underline{p}\,dA$



Interpoláció, folytonosság, lokális közelítés

Tétel: mindig előállítható pontosan egy olyan *(n-1)*-ed fokú (egyváltozós esetben) polinom, amely *n* számú $x_1, x_2, \dots, x_n$ helyen előre megadott $f_1, f_2, \dots, f_n$ értékeket vesz fel.



Lagrange-féle interpolációs polinomok: függvényértékek az előírt értékek.

Hermite-féle interpolációs polinomok polinomok: függvényértékek és deriváltak az előírt értékek.

Interpoláció, folytonosság, lokális közelítés

C^0 és C^1 folytonosság: