

BME Építészmérnöki Kar
Szilárdságtani és Tartószerkezeti Tanszék

EGYENSÚLY ÉS MORFOLÓGIA: KONVEX POLIGONOK DINAMIKAI VIZSGÁLATA

TDK dolgozat
2009

Készítette:
Krenn Tamás (III. évf.)
Szabó Tímea (V. évf.)

Konzulens:
Dr. Várkonyi Péter
Dr. Domokos Gábor

TARTALOMJEGYZÉK

1. A dolgozat témája és célja	3
2. A vizsgálat előkészítése	4
2.1. A vizsgálat tárgya.....	4
2.2. A vizsgálat terének szűkítése.....	4
2.3. Az első lépés: fahasábok.....	5
3. Konvex poligonok dinamikája – a szimuláció	7
3.1. A poligon-generálás.....	7
3.2. A leejtés paraméterei	8
3.3. A zuhanás	9
3.4. Az ütközés.....	10
3.5. A megállási feltétel	12
4. A kísérletből kinyert adatok	12
4.1. Az alakfüggő paraméterek.....	13
4.1.1. Laposság	13
4.1.2. Oldalhossz.....	13
4.1.3. Energiaszint	13
4.1.4. Vonzástartomány	13
4.2. Dinamikafüggő paraméterek.....	15
4.2.1. Relatív gyakoriság.....	15
4.3. Korrelációkeresés	15
5. Eredmények.....	16
6. Összefoglalás	19
Köszönetnyilvánítás.....	20
Irodalomjegyzék	21

*„Repül a nehéz kő: ki tudja, hol áll meg?
Ki tudja, hol áll meg, s kit hogyan talál meg?”*

(Arany János: Toldi, részlet)

1. A DOLGOZAT TÉMÁJA ÉS CÉLJA

A kavicsok, és más, kopási folyamatokban létrejövő geológiai alakzatok kialakulásának módja a geológia hosszú idő óta vizsgált, jelenleg is aktív területe. A vizsgálatok legfőbb motivációja, hogy a megfigyelt formák egy adott terület múltbéli geológiai, meteorológiai viszonyairól szolgáltatnak információt [1]. Például ha egy adott helyről származó sivatagi kavicspopuláció vizsgálatakor a kavicsok alakjából valószínűsíthető, hogy folyóvíz alakította őket, akkor feltételezhetően azon a területen valaha vízfolyás volt; vagy szoktak szél által koptatott kövekből valaha volt domináns szélirányokra következtetni [2].

Mivel a természetben lejátszódó kopási folyamatok, melyek az eróziós munka révén a kavicsokat is folyamatosan alakítják, nagyon összetettek, vizsgálatuk elsősorban kísérletekkel, terepi mérésekkel és egyszerűsített matematikai kopásmodellekkel lehetséges. A kopási folyamatok és modelljeik alapvetően két osztályba sorolhatók: az ütközéses- és a nem ütközéses (azaz valamilyen egyéb kopási mechanizmusra épülő) folyamatokra. Elsősorban ütközések révén alakulnak ki például a folyó által szállított homokszemek, melyeket a folyóvíz magával visz, ezáltal azok a mederrel ütközve kopnak. Ilyenek az aszteroidák is, melyek az űrben keringő porszemekkel, más aszteroidákkal találkozva kopnak [3], vagy a szélfúttá homok csiszoló munkája által létrejövő, úgynevezett „éleskavicsok” [4]. Ugyanakkor ezzel kevésbé magyarázhatóak más természetes folyamatok, melyek például a csiszolópapírral végzett famegmunkáláshoz hasonlóan működnek. Az ütközéses kopásmodelleken belül is felállíthatunk két, egymástól lényegesen eltérő alcsoportot, méghozzá a gravitáció szerepe szerint: az egyiknél a gravitáció hatása meghatározó a végeredmény szempontjából (folyó szállította kavics), a másiknál elhanyagolható (a széllel szállított homok és a sivatagi kövek kölcsönhatása, aszteroidák).

Munkánk célja egy egyszerűnek tűnő, de rendkívül összetett kopási folyamat, a hullámzó víz által mozgatott kövek kopásának elemzése. A hullámok hatására a kövek többnyire kis területen csúszkálnak (vagy alaktól függően esetleg görgögnék), ez okozza a tényleges kopásukat. Ugyanakkor időről időre nagyobb impulzusok hatására felemelkednek és új helyzetben érnek ismét földet. Így a kopás egy csiszolási folyamat és egy gravitációs ütközési folyamat kombinációja, a dolgozatban elsősorban az utóbbira koncentrálnak, amely meghatározza, hogy egy adott kő egy-egy oldala mennyi ideig van koptatásnak kitéve. Célunk annak meghatározása, hogy vannak-e a köveknek olyan geometriai jellemzői, melyek alapján elfogadható pontossággal statisztikusan előrejelezhető, hogy egy véletlen impulzus hatására elrepülő kavics hogyan fog földet érni. Ezzel kiváltható lenne a repülés és pattogás dinamikájának rendkívül időigényes szimulációja, és a jelenlegi munka folytatásaként lehetővé válna a kopási folyamat egészének hatékony modellezése.

A dolgozat második fejezetében részletesebben bemutatjuk a modellünket és alapfeltételezéseit. A 3. fejezetben leírjuk a számítógépes szimuláció vázát és technikai részleteit. A 4. és az 5. fejezet ismerteti a szimulációból kinyert adatok feldolgozásának módszerét és ebből nyert eredményeinket. Végül a dolgozat összefoglaló fejezettel zárul.

2. A VIZSGÁLAT ELŐKÉSZÍTÉSE

2.1. A vizsgálat tárgya

Kutatásunk kiindulási felvetése az a megfigyelés volt, hogy bár a folyókban szállított, illetve a tengerparton megtalálható, kopásnak kitett kavicsok jellemző formáit ismerjük, keveset tudunk az ezt kialakító folyamatról. (Jól szemlélteti ezt az a példa, hogy a témával foglalkozó kutatók jelenleg is vitatott kérdése, miért laposak a tengerparti kavicsok [5][6], mikor az egyszerű kopásmodellek gömbölyű forma kialakulását jósolják [7].)

Ha megvizsgálunk egy kavicspopulációt, azt nagy valószínűséggel ki tudjuk jelteni, hogy azt folyóvíz koptatta-e, ám a folyamat részleteit nem ismerjük. Alapfeltevésünk az, hogy egy ilyen folyóvíz sodorta kavics kopásának folyamata a következő módon zajlik: a hullámzó, vagy áramló víz időnként felkapja a kavicsot, majd egy oldalán a meder fenekén megnyugszik. Ezután kisebb lökések hatására folyamatosan csúszkál, amíg a víz ismét fel nem emeli, így koptatva folyamatosan az alsó oldalát. A munkánkban ismertetett konkrét vizsgálat arra vonatkozik, hogy egy leejtett kavics milyen gyakorisággal esik egy-egy oldalára, hisz ettől függ, hogy melyik oldal mennyire lesz kopásnak kitett. Ezzel lényegében egy később kidolgozandó kopásmodell bemenő adatait határozzuk meg. Ennek érdekében nagy mennyiségű szimulációt végzünk különböző alakú poligonokkal, és egyértelmű összefüggéseket keresünk az alak jellemzők és az egyes oldalakra való megérkezés gyakorisága között.

2.2. A vizsgálat terének szűkítése

A kavicsok világa nagyon változatos méret és forma tekintetében, ezért egy olyan közelítő módszert kellett alkalmaznunk, mely viszonylag egyszerűen vizsgálható, ellenőrizhető, de jól modellezi a kavicsok alakját, viselkedésüket. A közelítés alaptételei a következők:

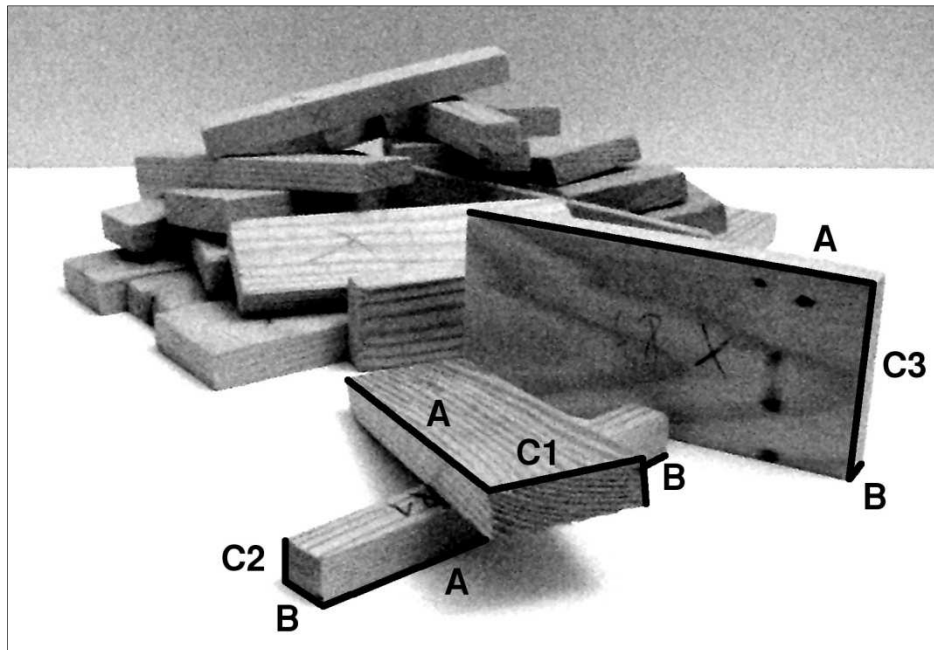
- két dimenzióban,
- homogén merev testként,
- konvex poligonokkal

szimuláljuk a kavicsokat. Noha a két dimenzióban való modellezés jelentősen leegyszerűsíti a valóságot, egy ilyen modell ugyanakkor lényegesen kezelhetőbb. A konvex poligonokkal való modellezés pedig egy természetes feltételezés, mivel minden homogén, merev test a konvex burkán gördül.

További feltételezéseink, hogy a kavicsok közegellenállás nélkül szabadon esnek, és vízszintes talajra érkezve, súrlódás nélkül ütköznek.

2.3. Az első lépés: fahasábok

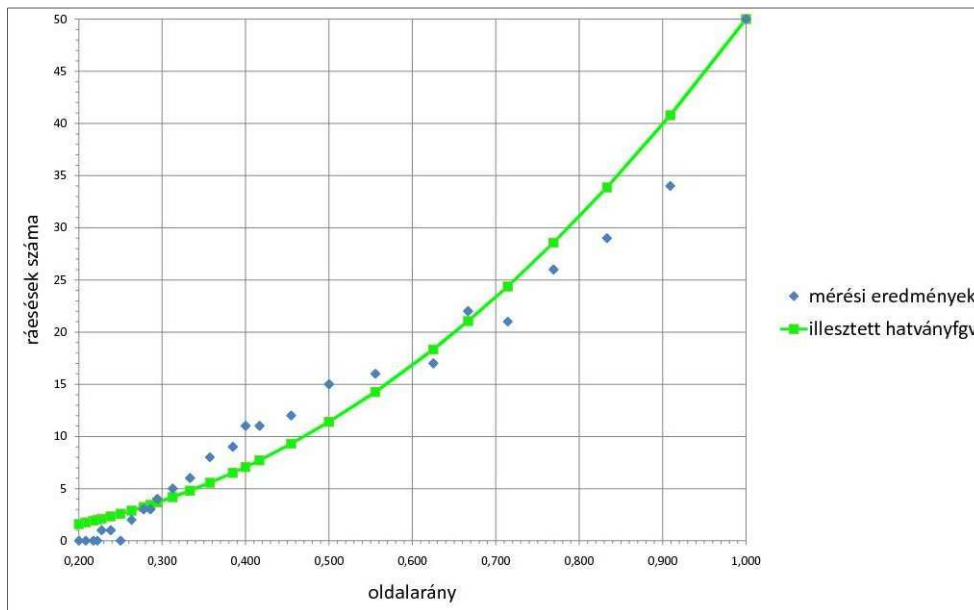
Bevezetésképp kísérleteket végeztünk téglalap alapú fahasábokkal, melyeket leghosszabb és legrövidebb éleik mérete megegyezett ($A=10$ cm, $B=1$ cm), s csak a harmadik méretükben különböztek ($C=1-5$ cm, 1-2 mm-es lépésközökkel). Ezeket a hasábokat dobálva - mindegyiket 100-szor egymás után - azt vizsgáltuk, hogy melyik lapján hányszor lesz egyensúlyban. Az „A” él hossza szándékosan lényegesen nagyobb a másik kettőénél, mert így (homogén anyag esetén) tipikusan olyan lapra esik a test, aminek két határoló éle 10 cm hosszú. Ezzel biztosítottuk azt a feltételt, hogy különböző oldalarányú kétdimenziós konvex poligonokat vizsgálunk, hisz a megnyugvást jelentő stabil egyensúlyok helyei 2 dimenzióban lekorlátozódnak azokra a lapokra, amik a hasábokként különböző arányú téglalapokat határolják [1. ábra].



$A=10$ cm, $B=1$ cm, $C1=3$ cm, $C2=1$ cm, $C3=4,8$ cm

1. ábra: A kísérleti fahasábok

A mérés végeredményére függvényt illesztetünk [2. ábra], ám az látszott, hogy az értékelhető végeredményhez még jóval több hasáb elkészítésére lenne szükség. A kísérlet másik tanulsága az, hogy egyáltalán nem biztos, hogy az egyensúlyok száma az oldalaránnyal korrelál a legszignifikánsabban. Mivel a fentebb leírt módon könnyen kialakítható poligonok tere elég korlátozott, és a kísérlet elvégzése is nagyon időigényes, a kutatás folytatásaként a számítógépes szimulációt választottuk.



2. ábra: A fahasáboldalak rövidebb élire érkezéseinek gyakorisága (%) az oldalarány függvényében

A mérési eredményeket logaritmikus skálán ábrázolva látszott, hogy a kérdéses kapcsolat ott lineáris jellegű, így normál skálán hatványfüggvény alakú összefüggést kerestünk. Az illesztett függvény: $f(x)=50*x^{2,1339}$.

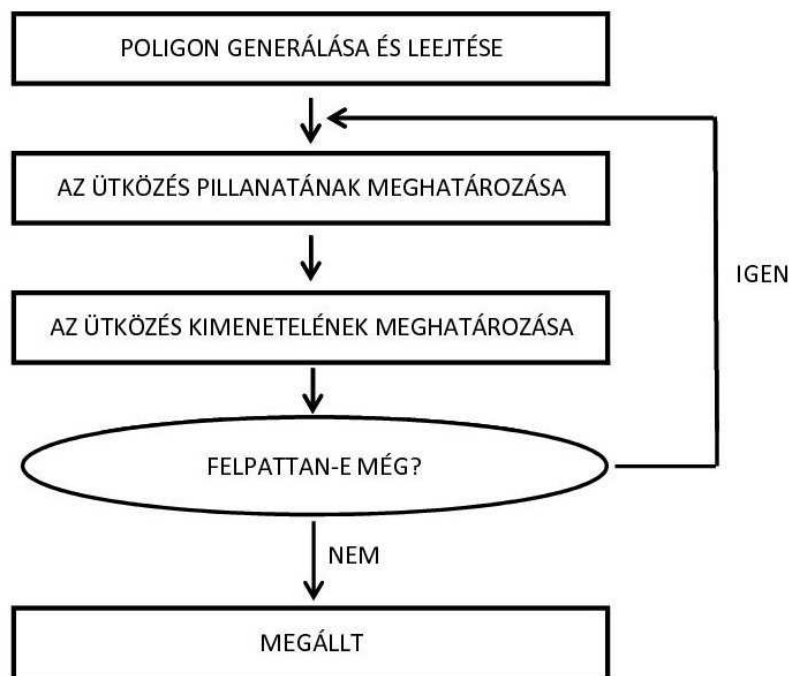
A fahasábok pontos mérési adatait lásd: [Mellékelt CD]

3. KONVEX POLIGONOK DINAMIKÁJA – A SZIMULÁCIÓ

Ez a fejezet a modellezés elméleti háttérének kifejtésével és magyarázatával foglalkozik. Az előzőekben már tárgyalt okok miatt egy elméleti modell felállítása mellett döntöttünk, amit aztán computer segítségével sokszor és sokféle bemenő adattal lefuttathatunk, majd statisztikus alapú korrelációkat kereshetünk a számunkra lényegesnek tűnő mennyiségek között. A végcél az, hogy meg tudjuk mondani, hogyan függ az alaki paramétereiktől az, hogy melyik oldalára esik a test.

A számítógépes szimulációt a modellezni kívánt jelenség részegységekre bontásával, és a program által kezelhető, matematikai egyenletekké való alakításával kezdtük, melyeket külön-külön ismertettünk.

A poligon leejtési folyamatának fontosabb részegységei, azok sorrendje:



A szimulációt kivitelező program felépítését lásd: [Mellékelt CD]

3.1. A poligon-generálás

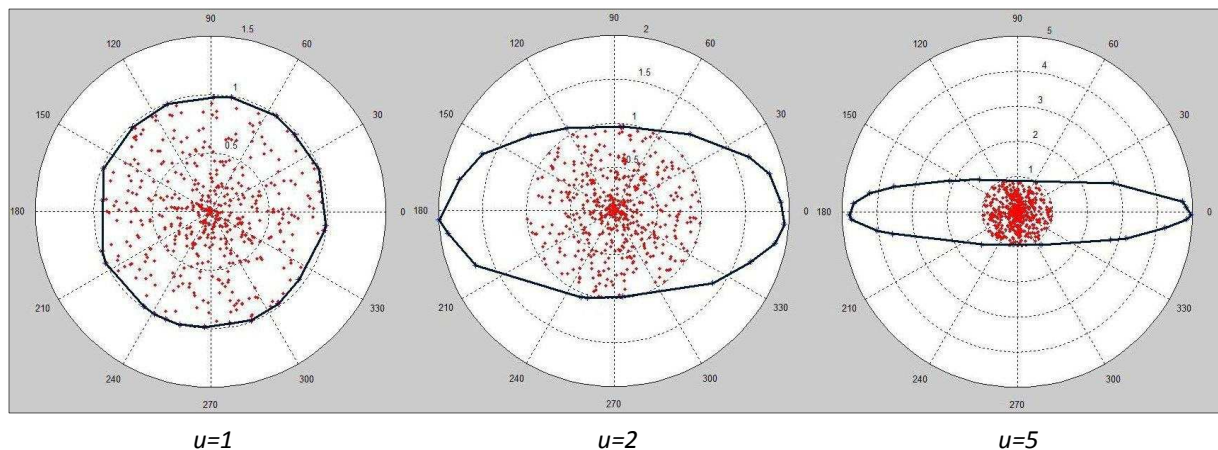
Ahhoz, hogy a szimuláció minél szélesebb körű esetek leírására alkalmas legyen, olyan eljárást kellett alkalmaznunk a sokszögek létrehozására, ami elméletileg a konvex poligonok terének egészét képes lefedni. A másik fontos momentum, hogy a sok szimuláció gyors és folyamatos lefutása érdekében a program véletlenszerűen generálja őket, így a lehető legegyszerűsebb eloszlással kell létrehozni a testeket.

Az alkalmazott eljárás működésének elve: a program n darab véletlenszerű pontot generál egyenletes eloszlással egy egység sugarú kör belsejében, majd kiszámítja a pontok konvex burkát. A poligon csúcsainak koordinátáit olyan polárkoordinátarendszerben adtuk meg, melynek $(0,0)$ pontja a poligon súlypontja, és 0 elfordulási szögű pontjai egy súlyponton

átmenő, vízszintes egyenesre (tengely) esnek. Ahhoz, hogy sokféle poligont tudjunk létrehozni, bevezettünk egy u nyújtótényezőt, mellyel megszorozva a konvex burok csúcspontjainak súlyponthoz képesti x koordinátáit, a u -tól függő laposságú alakokat nyerünk. A laposságot a következőképp definiáltuk:

$$\text{laposság} = \frac{\text{a súlyponttól legtávolabb eső kerületi pont távolsága}}{\text{a súlyponthoz legközelebb eső kerületi pont távolsága}}$$

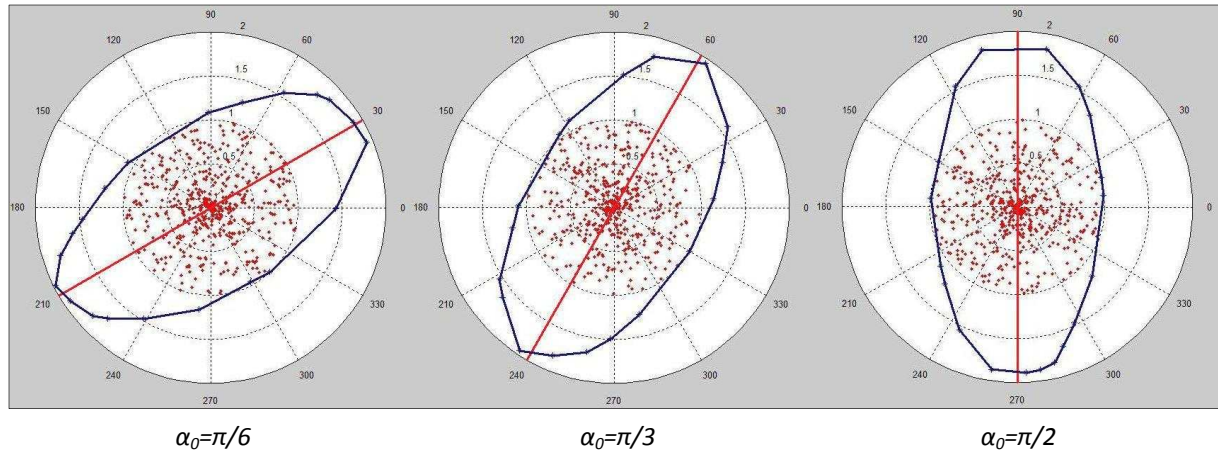
Olyan esetekben, amikor a test körszerű, a laposság 1 körüli érték, míg elnyújtott esetekben u -tól függően változik [3. ábra]. Ez az első olyan fontos mennyiség, mely a geometriából következően jellemző a poligon alakjára, és egyben hatással lehet a dinamikai folyamatok lejátszódására.



3. ábra: Különböző ' u ' értékkel generált poligonok

3.2. A leejtés paramétereit

A leejtés a dinamikai folyamat első eleme, ezért itt kiemelten fontos, hogy az ésszerű értékek tartományát lehetőleg jobban lefedve, de egyenletes eloszlással tudjunk kezdeti paramétereket generálni. A szükséges mennyiségek: a test helyzete a kiindulás pillanatában [h_0 : a súlypont magassága, α_0 : a poligon tengelyének vízszintessel bezárt szöge], a kezdeti sebesség [v_0] és a kezdeti szögsebesség [ω_0]. A lehetőségek nagy tartományon való mozgásának ésszerűsítése érdekében a következő megkötéseket tettük: $v_0=0$, $\omega_0=0$ és h_0 a test méretéhez képest nagy. α_0 értéke véletlenszerűen alakul 0 és 2π között, egyenletes eloszlással. Mindez azt eredményezi, hogy a lehetséges eseteket leszűkítettük arra, amikor csak nagy magasságból kezdősebesség és szögsebesség nélkül elengedünk egy kavicsot, de α_0 értékének változása miatt lényegében az összes elképzelhető helyzet létrehozható, ami a földet éréskor kialakulhat [4. ábra].



4. ábra: Példák poligonok különböző kiindulási helyzeteire ' α_0 ' értékétől függően

3.3. A zuhanás

Egy általunk generált, kezdősebességgel rendelkező, szabadon eső poligon i -edik csúcsának y koordinátája t időpillanatban:

$$y_i(t) = h_0 - v_0 * t - \frac{1}{2} * g * t^2 + d_i * \sin(\omega_0 * t + \alpha_0 + \varphi_i)$$

ahol h_0 a test súlypontjának kezdeti magassága, v_0 a test súlypontjának kezdeti sebessége, ω_0 a test kezdeti szögsebessége, α_0 a poligon tengelyének kezdeti vízszintessel bezárt szöge, d_i és φ_i az i -edik csúcs polárkoordinátájának komponensei t időpillanatban. (Az előjelekről: a függőleges sebességvektor pozitív, ha lefelé mutat; a szögsebesség pozitív, ha óramutató járásával ellentétes forgáshoz tartozik; a szögértékek (α, φ) pozitívak, ha egy vízszintes tengelyhez képest óramutató járásával ellentétes irányban állnak.)

A zuhanás természetesen addig tart, amíg ezek közül a magassági koordináták közül valamelyik 0 nem lesz, azaz amíg nem teljesül valamely i -re az

$$y_i(t) = 0$$

egyenlet. Ebben a t időpillanatban kell meghatároznunk a súlypont mozgását jellemző értékeket, hogy a következő fázisba léphessünk. Ezt az összefüggést azonban hagyományos algebrai módszerekkel nem lehet megoldani, a benne lévő szögfüggvény miatt ugyanis transzcendens. Így diszkrét időpillanatonként kell megvizsgálni, hogy bármely csúcs y koordinátája átlépte-e már a 0-t, de ezt hatékonyan csak számítógépes szimulációval lehet kivitelezni.

Ha ismerjük ezt a t időpillanatot és ezzel együtt i -t, akkor ezek felhasználásával már felírhatók az ütközés pillanatát jellemző helyzeti és dinamikai paraméterek, úgymint: a poligon tengelyének α_1 vízszintessel bezárt szöge, a poligon súlypontjának h_1 magassága, az

ütköző pont súlyponttól mért távolságának r vízszintes vetülete, a súlypont v_1 sebességvektora és a poligon ω_1 szögsebessége (állandó). (r pozitív, ha a leérkező csúcs a súlyponttól jobbra található.)

$$\alpha_1 = \omega_0 * t + \alpha_0$$

$$h_1 = d_i * \sin(\alpha_1 + \varphi_i)$$

$$r = d_i * \cos(\alpha_1 + \varphi_i)$$

$$v_1 = v_0 + g * t$$

$$\omega_1 = \omega_0$$

A legelső földet éréskor, amikor a kezdő sebesség (v_0) és szögsebesség (ω_0) is 0:

$$\alpha_1 = \alpha_0$$

$$h_1 = d_i * \sin(\alpha_1 + \varphi_i)$$

$$r = d_i * \cos(\alpha_1 + \varphi_i)$$

$$v_1 = g * t$$

$$\omega_1 = 0$$

3.4. Az ütközés

Az ütközéseknek az ütközési pont sebességének megmaradása szempontjából három esetét különböztethetjük meg:

- tökéletesen rugalmas ütközés: amikor az ütközési pont függőleges sebessége az ütközés során -1-szeresére változik
- tökéletesen rugalmatlan ütközés: amikor az ütközési pont függőleges sebessége az ütközés utáni pillanatban 0-ra redukálódik
- a kettő közti eset: amikor az ütközési pont függőleges sebessége $-k$ -szorosára változik, ahol k az úgynevezett ütközési szám ($0 < k < 1$)

A célunk az, hogy k -tól függően meg tudjuk mondani egy v_1 sebességgel, ω_1 szögsebességgel és α_1 irányultsággal a földre csapódó poligon [5. ábra] tömegközéppontjának ütközés utáni v_2 sebességét és ω_2 szögsebességét, amely megadható az ütközéskor a testet érő I impulzus ismeretében:

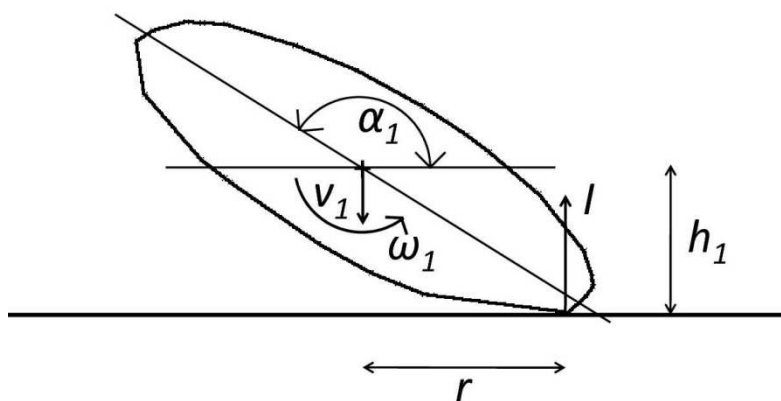
$$(1) \quad m \cdot v_2 + I = m \cdot v_1$$

$$(2) \quad \Theta \cdot \omega_2 - r \cdot I = \Theta \cdot \omega_1$$

Ahol m a test tömege, r a földet érő i -edik csúcspont súlyponttól mért távolságának vízszintes vetülete; Θ a test tehetetlenségi nyomatéka, I pedig meghatározható az

$$(3) \quad -v_{\text{ütközési pont}_1} \cdot k = v_{\text{ütközési pont}_2}$$

egyenletből.



5. ábra: A földre csapódó poligon helyzeti és dinamikai jellemzői az ütközés pillanatában
 α_1 : a poligon tengelyének vízszintessel bezárt szöge, h_1 : a poligon súlypontjának magassága, r : az ütközési pont súlyponttól mért távolságának vízszintes vetülete, v_1 : a poligon súlypontjának sebessége, ω_1 : a poligon szögsebessége, I : a poligont érő impulzus

Az (1) egyenletben szereplő ütközési ponti sebességek kifejezhetők a súlypont sebességéből és szögsebességéből:

$$(4) \quad -(v_1 - \omega_1 \cdot r) \cdot k = (v_2 - \omega_2 \cdot r)$$

A három egyenletből álló (1),(2),(4) lineáris egyenletrendszer megoldva előjelhelyesen megkapjuk, hogy mekkora lesz az ütközés után a súlypont sebessége és szögsebessége:

$$(5): \quad v_2 = \omega_1 \cdot r \cdot k + \omega_2 \cdot r - v_1 \cdot k$$

(6):

$$\omega_2 = \frac{m \cdot v_1 \cdot r - \Theta \cdot \omega_1 - m \cdot r^2 \cdot \omega_1 \cdot k + m \cdot r \cdot v_1 \cdot k}{m \cdot r^2 - \Theta}$$

A legelső ütközéskor $\omega_1=0$, ezért:

$$\omega_2 = \frac{m * v_1 * r * (1 + k)}{m * r^2 + \theta}$$

$$v_2 = \omega_2 * r - v_1 * k$$

Miután meghatároztuk az ütközésnél fellépő energiaveszteség miatt módosult új súlyponti sebesség és szögsebesség értékeit, ezeket kezdőértékeként véve ismét szabadon esik a test mindaddig, amíg egy újabb csúcs y koordinátája 0 nem lesz.

3.5. A megállási feltétel

A test kezdeti mozgási és forgási energiája folyamatosan csökken a sorozatos ütközések során. A szimulációt akkor fejeztük be, amikor a súlyponti sebességének négyzetének és a szögsebességének négyzetének összege kisebb értéket adott, mint a súlyponttól legtávolabb eső csúcs súlyponttól mért távolságának háromezred része. Tehát, ha

$$v_0^2 + \omega_0^2 < \frac{R_{max}}{3000}$$

akkor a testet megálltnak tekintjük.

4. A KÍSÉRLETBŐL KINYERT ADATOK

Az alap statisztika felállításához a fentebb részletesen leírt programot különböző u nyújtótényezővel generált alakokra futtattuk. Adott nyújtás mellett 100 különböző testet testenként 100-szor ejtettünk le, és az ebből kapott adatokat hasznosítottuk.

A szimulációból megkapható adatok két fő csoportba sorolhatók: a pusztán alakfüggő paraméterek és a dinamikai folyamat végeredményei. Munkánk célja az ezek közti korrelációk feltárása, ezért lényeges, hogy minél pontosabban definiáljuk ezek gondolati, fizikai tartalmát.

A kísérletből kinyert adatokat, grafikonokat lásd: [Mellékelt CD]

4.1. Az alakfüggő paraméterek

4.1.1. Laposság

$$\text{laposság} = \frac{\text{a súlyponttól legtávolabb eső kerületi pont távolsága}}{\text{a súlyponthoz legközelebb eső kerületi pont távolsága}}$$

Bővebben lásd: [3.1.]

4.1.2. Oldalhossz

Egy oldal oldalhosszának ezentúl azt a mennyiséget nevezzük, ami az éppen vizsgált oldal hosszának, és a poligon kerületének hányadosaként adódik. Így egy 0 és 1 közé normált értéket kapunk, ami statisztikai kimutatásra jobban felhasználható, mint a valós oldalhossz. Tehát:

$$\text{oldalhossz}[0 \dots 1] = \frac{\text{oldal hossza}}{\text{kerület}}$$

4.1.3. Energiaszint

Egy vizsgált oldal energiaszintjén az oldalon lévő stabil egyensúlyi pont súlyponthoz képesti potenciális energiájának abszolút értékét értjük. Ezt is célszerű 0 és 1 közé normálni, a következők szerint: 1 (tehát maximális) az energiaszintje a súlyponttól legtávolabb lévő instabil egyensúlyi pontnak, míg 0 (azaz minimális) az energiaszintje a súlypontnak. Így egy kiválasztott oldalra felírva:

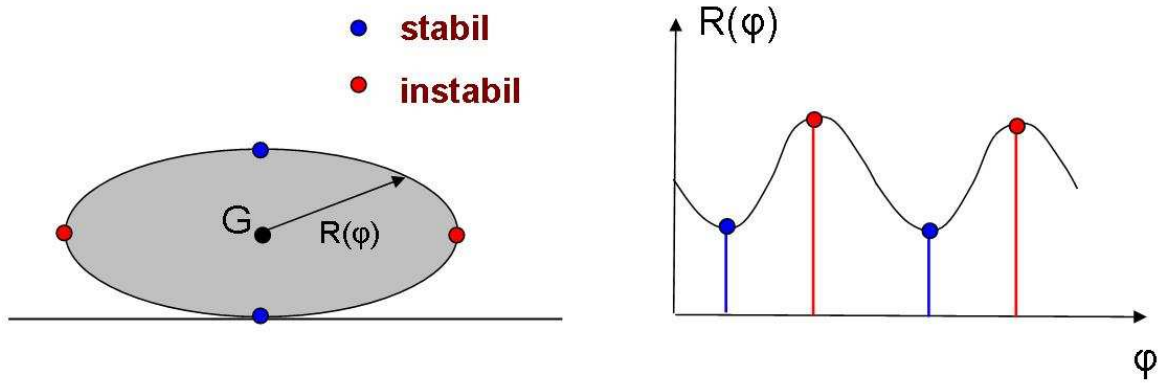
$$\text{energiaszint} = \frac{\text{az oldal egyenesének súlyponttól mért távolsága}}{\text{a súlyponttól legtávolabb lévő kerületi pont távolsága}}$$

4.1.4. Vonzástartomány

A vonzástartomány definiálásához először tisztában kell lennünk az egyes egyensúlyi helyzetek meghatározásának módjával. Az egyensúlyi helyzeteknek két tipikus formáját kell vizsgálnunk:

- stabil egyensúlyi helyzet: olyan egyensúlyi helyzet, melyben egy testet kis zavarásnak kitéve mindig visszatér ebbe az állapotába.
- instabil egyensúlyi helyzet: olyan egyensúlyi helyzet, melyben egy testet kis zavarásnak kitéve soha sem tér vissza ebbe az állapotába.

Ezek meghatározásának módja a következő: a homogén, konvex, merev síkbeli testek körvonala felírható egy $R(\phi)$ alakú függvénnyel, ahol R jelöli a kerület egyes pontjainak súlyponttól mért távolságát, ϕ pedig R vektor vízszintessel bezárt szögét [6. ábra]. Ebben a rendszerben az egyensúlyi helyzetek $R(\phi)$ stacionárius pontjainak feleltethetők meg. $R(\phi)$ lokális minimuma stabil egyensúlyi helyzet, $R(\phi)$ lokális maximuma pedig instabil egyensúlyi helyzet.

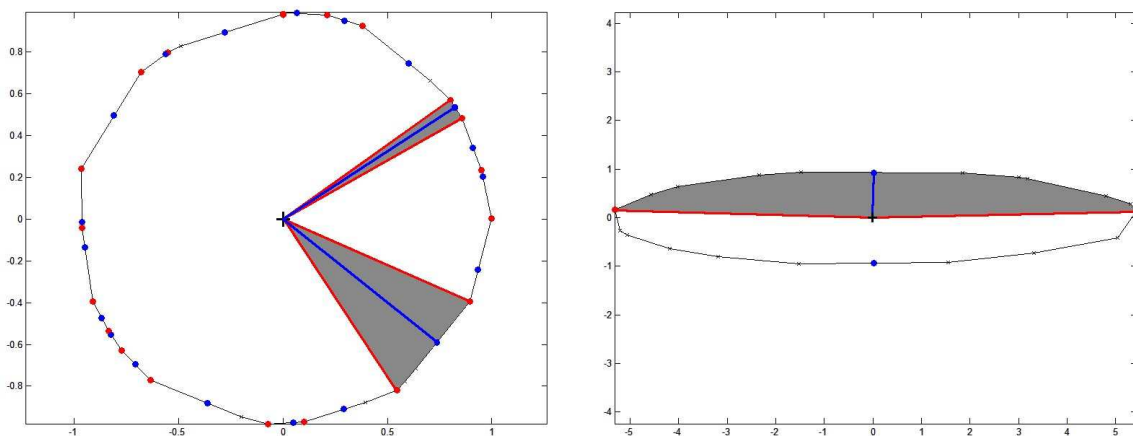


6. ábra: homogén, konvex testek egyensúlyi helyzetei két dimenzióban
 $R(\varphi)$ lokális minimumai a stabil egyensúlyi helyzetek, $R(\varphi)$ lokális maximumai az instabil egyensúlyi helyzetek

A poligon egy adott stabil egyensúlyi pontjának vonzástartománya az a szögtartomány, amelyet a stabil pont melletti két szomszédos instabil egyensúlyi pontba a súlypontból húzott sugarak, mint szögszárak határoznak meg [7. ábra].

Két dimenzióban a stabil és instabil pontok a kerület mentén felváltva követik egymást, így egy stabil egyensúlyi helyzet vonzástartományát mindig két szomszédos instabil egyensúlyi pont közötti szögtartomány határozza meg. A normálás szempontjából érdemes ezt a tartományt a két szomszédos instabil pont közötti szögtartományként kezelni, így a 0 és 1 közé normált értéket 2π -vel való osztás után kapjuk:

$$\text{vonzástartomány} = \frac{\text{két szomszédos instabil pont közti szögtartomány}}{2\pi}$$



7. ábra: A vonzástartományok értelmezése, bemutatása különböző laposságú poligonokon
 Jól látható a stabil (°) és instabil (°) egyensúlyok számbeli különbsége, s az ezzel összefüggő differencia a vonzástartományok számában és nagyságában körszerű ($u=1$) és lapos ($u=5,5$) poligonok esetén

4.2. Dinamikafüggő paraméterek

4.2.1. Relatív gyakoriság

Relatív gyakoriságon azt a 0 és 1 közötti számot értjük, mely megmutatja, hogy egy konkrét poligont vizsgálva, az esetek hányad részében állt meg a test egy adott oldalon. Természetesen ennek csak olyan oldalakon van 0-tól eltérő értéke, amin található stabil egyensúlyi helyzet (de akkor sem feltétlenül). Számítása:

$$\text{relatív gyakoriság} = \frac{\text{az oldalon mérhető megnyugvások száma}}{\text{a testtel lefuttatott szimulációk száma}}$$

4.3. Korrelációkeresés

Munkánk célja az eddig ismertetett kétféle (alak- és dinamikafüggő) paraméter közötti összefüggések feltárása oly módon, hogy csak a morfológiai tulajdonságokból is meg lehessen adni a dinamika által erősen befolyásolt folyamat végeredményét. Más szóval azt szeretnénk elérni, hogy csupán az alak ismeretében becsülhetőek legyenek az egyes oldalakra vonatkozó relatív gyakorisági értékek, amiket aztán a kopásmodell hasznosítani tud a kopási folyamat vizsgálatánál.

Az alaki paraméterek közül ki kell emelni a laposság értékét. Ennek függvényében a poligonok viselkedése (és emiatt a várható eredmények is) két alapvető csoportra osztható: körszerű (laposság 1 körül) és lapos testekre (laposság kb. 4-6). Körszerű testeknél ugyanis az egyes oldalak energiaszintjeiben viszonylag kicsi, míg az egyes stabil egyensúlyi helyzetek vonzástartomány-értékeiben nagyobb a differencia, ellenben lapos testeknél ugyanez megfordul: az energiaszint értékeinél nagyobb, a vonzástartományoknál kisebb a differencia. Ez könnyen belátható, hisz körszerű test esetén a csúcsok nagyjából egy $R=1$ sugár mentén helyezkednek el, de szinte minden oldalon van stabil egyensúlyi helyzet, míg lapos esetben a magas u vízszintes-nyújtótényező miatt az oldalak súlyponttól mért távolsága jobban szóródik, de stabil egyensúlyi pontból jellemzően 2-t találunk, így a vonzástartományok 0,5 körül vannak [7. ábra]. Ez azért lényeges, mert emiatt a testek eltérő módon viselkednek, ami várhatóan a statisztikában is megmutatkozik.

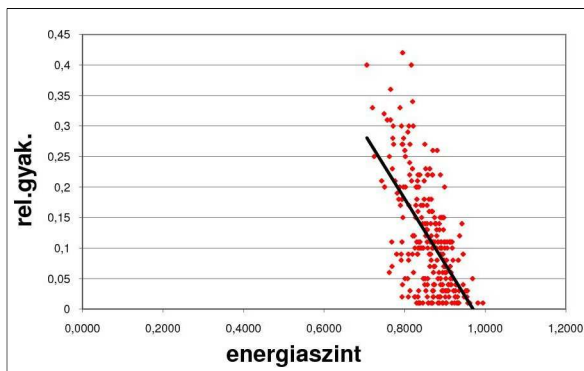
Az alaki és dinamikai paraméterek közti korrelációkeresést az előbb említettek szerint nem elég egy laposságértékre elvégezni, ezért körszerű (tehát 1 körüli laposságú) és lapos (nagy laposságértékű) poligonokra is elő kell állítani az oldalhossz – relatív gyakoriság, energiaszint – relatív gyakoriság és vonzástartomány – relatív gyakoriság diagramokat.

5. EREDMÉNYEK

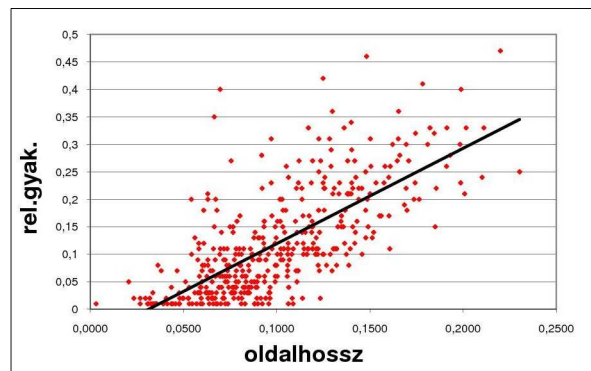
Az eddigieket összefoglalva tehát célunk az, hogy egy test alakja és a leejtésének során lejátszódó dinamikai folyamat végállapota között olyan összefüggést találjunk, aminek segítségével pusztán az alak ismeretével, kísérletek lefuttatása nélkül is jó valószínűséggel meg tudjuk adni a dinamika végkimenetelét, ezzel szolgáltatva a kopást leíró kopásmodell bemenő paramétereit.

Várakozásunk szerint különböző laposságú esetekben az oldalhossz – relatív gyakoriság, energiaszint – relatív gyakoriság és vonzástartomány – relatív gyakoriság függvények ismeretében olyan erős korrelációs együtthatókat találunk, melyeket felhasználva az alakból számított várható relatív gyakoriság értékek a kopásmodell lefutása utáni végeredményben nem okoznak jelentős differenciát a valósághoz képest.

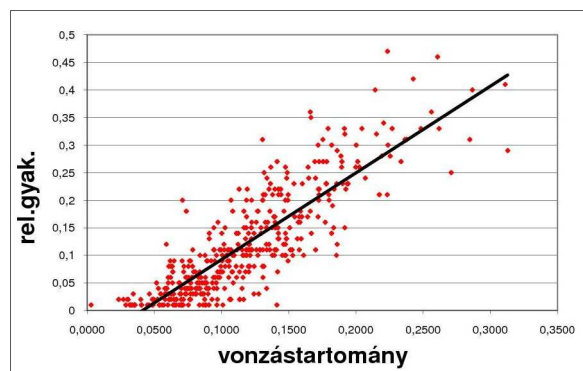
A körszerű testek ($u=1$) estén a kapott eredményeket az [8. ábra] mutatja:



8/A: energiaszint – relatív gyakoriság összefüggése
 $R^2=0,3714$



8/B: oldalhossz – relatív gyakoriság összefüggése
 $R^2=0,5121$



8/C: vonzástartomány – relatív gyakoriság összefüggése
 $R^2=0,7296$

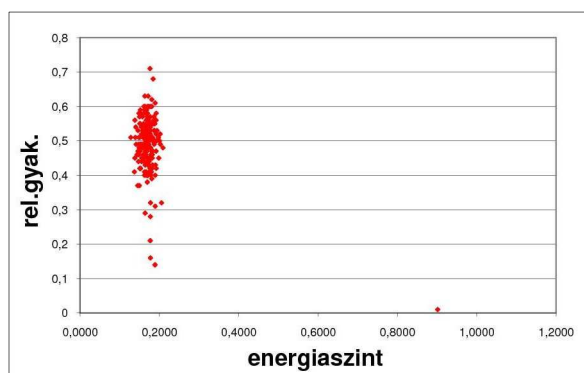
8. ábra: a futtatás eredményei $k=0.5$ esetén, körszerű testekre ($u=1$)

Az ábrákról jól leolvasható, hogy 1 körüli laposságérték esetén az energiaszinttel nem kifejezetten erős, viszont várakozásainknak megfelelően az oldalhossz és a vonzástartomány

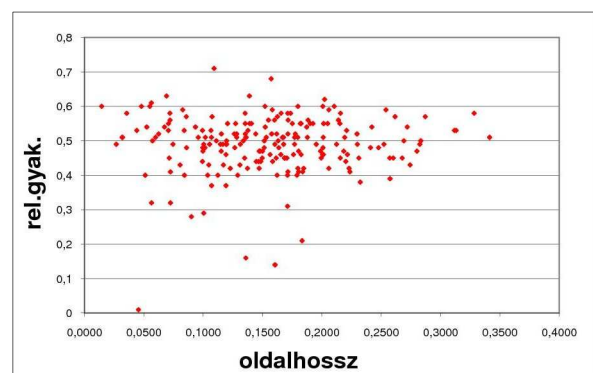
értékeivel erős korreláció van. A lineáris kapcsolat korrelációs együtthatójának értéke az oldalhossz – relatív gyakoriság összefüggésénél 0,716, míg a vonzástartomány – relatív gyakoriság esetében 0,854! (A korrelációs együttható 0 és 1 között változó szám, mely két valószínűségi változó összefüggésének szorosságát fejezi ki.)

Ebből az következik tehát, hogy ha ismerjük egy kopást elszenvedő test alakját - amiből meghatározható az egyes stabil egyensúlyi helyzeteihez tartozó vonzástartományok nagysága - akkor nagy biztonság mellett megadhatjuk az egyes oldalakra vetített relatív gyakoriság értékeit. Ezeket behelyettesítve a kopásmodellbe, megkaphatjuk a kopás végeredményét, anélkül, hogy kísérleteket kellett volna lefuttatnunk a dinamika okán.

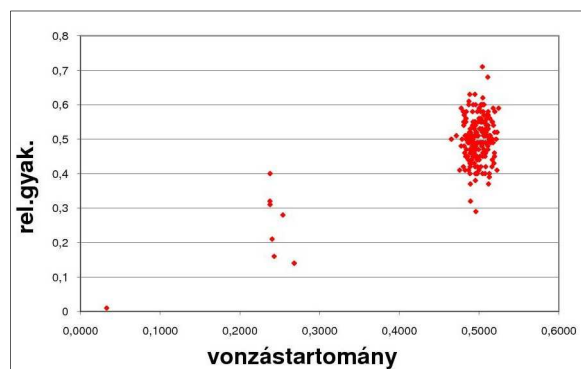
A lapos testek ($u=5,5$) esetén a kapott eredményeket [9. ábra] mutatja:



9/A: energiaszint – relatív gyakoriság összefüggése



9/B: oldalhossz – relatív gyakoriság összefüggése



9/C: vonzástartomány – relatív gyakoriság összefüggése

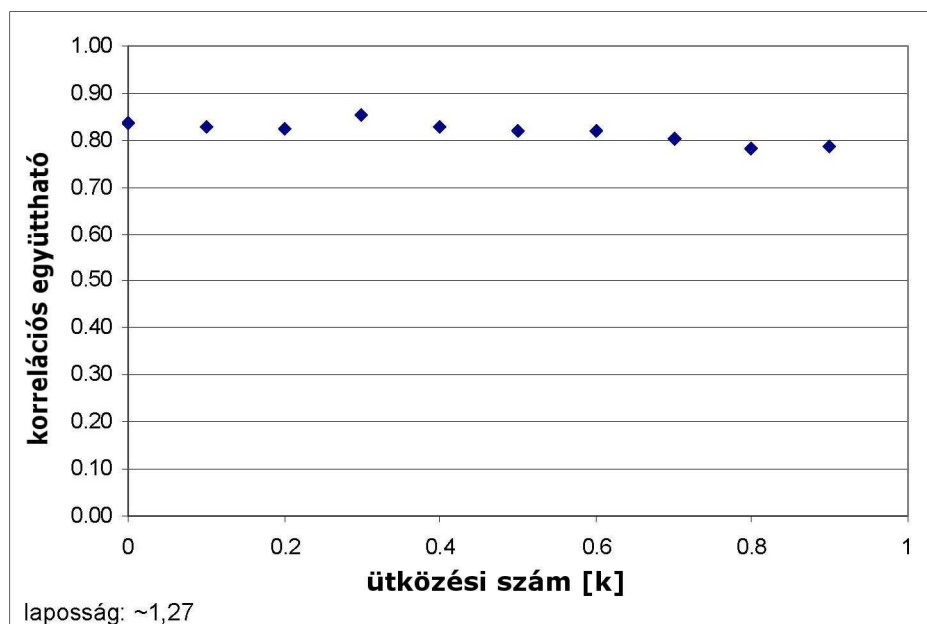
9. ábra: a futtatás eredményei $k=0.5$ esetén, lapos testekre ($u=5,5$)

Mint látható, nagy laposságú test esetében nem lineáris, ám elég erős páronkénti összefüggést tapasztalhatunk az energiaszint – relatív gyakoriság és a vonzástartomány – relatív gyakoriság grafikonjain, mivel a mért értékek egy jól elkülöníthető, viszonylag kis területen kiterjedő és sűrű pontfelhőt alkotnak. Mivel ennek az összefüggésnek az értékelése, számszerűsítése bizonytalanságra adhatna okot (a lineáris kapcsolatokra értelmezett korrelációs együtthatóval nem lehetséges), a precízebb vizsgálhatóság érdekében körszerű testeket vizsgáltuk tovább.

A [3.4.] bekezdésben leírtak alapján a dinamikai folyamat modellezés szempontjából egyik legfontosabb részének, az ütközésnek az ütközés során elnyelődő energia nagyságát tekintetbe véve három fő csoportja van: rugalmas, rugalmatlan és a kettő közti állapot. Ezek között az úgynevezett ütközési szám $[k]$ teremt kapcsolatot, ami azt mutatja meg, hogy a zuhanó test földet érő pontbeli függőleges sebességének hányad része marad meg az ütközés után ($0 \leq k \leq 1$; tökéletesen rugalmas ütközés: $k=1$; tökéletesen rugalmatlan ütközés: $k=0$).

Feltehető a kérdés tehát, hogy a talált, nagy korrelációjú vonzástartomány – relatív gyakoriság összefüggés korrelációs együtthatójának értéke hogyan függ az ütközési szám értékétől? A fent leírt okok (lapos esetben pontfelhő a grafikonon) miatt ezt már csak a körszerű testek esetén vizsgáltuk. A várakozásaink szerint $k=0$ esetén (tökéletesen rugalmatlan ütközés) a korreláció viszonylag magas (hisz a test keveset pattog a nagy energiavesztés miatt), és k -t növelve csökken, azonban a $k=1$ -nél (tökéletesen rugalmas ütközés) a korreláció értéke nem triviális. A teljesen rugalmas ütközés során ugyanis semmilyen energia sem nyelődik el, így a poligon elméletileg végtelen sokáig pattog. Végtelen idejű pattogás esetén természetesen nem nyugodhat meg a test, így a korreláció értéke nem értelmezhető. Viszont ha megkapnánk a vonzástartomány - relatív gyakoriság korrelációjának és az ütközési számnak az összefüggését, akkor talán megbecsülhető a $k=1$ értékénél a korreláció értéke.

A mért eredményeket a [10. ábra] szemlélteti:



10. ábra: A vonzástartomány – relatív gyakoriság korrelációs együtthatója a k ütközési szám függvényében

Leolvasható, hogy korrelációs együttható várakozásainknak megfelelően $k=0$ -nál viszonylag magasan indul, majd az értelmezési tartományán nézve csökkenő trendet mutat. Ha egyenest feltételezünk a két mennyiség összefüggésének leírására, akkor teljesen rugalmas

esetben is becsülni tudjuk a korreláció értékét, ami –talán meglepő módon – még itt is elég magas lehet.

Mindebből jól látható, hogy a vonzástartomány – relatív gyakoriság összefüggés korrelációs együtthatója minden esetben magas, ebből következően a vonzástartomány az a geometriai mennyiség, aminek segítségével kísérletezés nélkül is kifejezhetjük a dinamikai folyamat eredményét, azaz az oldalakra vetített relatív gyakoriságot.

6. ÖSSZEFOGLALÁS

Munkánk tárgyát a víz szállította kavicsok alakjának evolúciós vizsgálata képezte. Alapfeltevésünk szerint a víz alakította kavicsok kopását döntően az okozza, hogy a hullámmó, vagy áramló víz időnként felkapja a kavicsot, majd az egy oldalán a meder fenekén megnyugszik. Ezután kisebb lökések hatására folyamatosan csúszkál, amíg a víz ismét fel nem emeli, így koptatva folyamatosan a kavics alsó oldalát. Ezt a fajta ütközést egy gravitációs ütközéses kopásmodellel lehet jól modellezni. Ütközéses modellek esetén a kopást a két ütköző test érintkezési pontjának kis környezete határozza meg. A gravitáció hatásával számoló ütközéses modell használatának nehézsége lényegéből fakad, ugyanis dinamikai szimuláció nélkül nehéz előre megmondani, mely pontok fognak érintkezni egymással.

Kutatásunk célja az volt, hogy kiküszöbölje a kopás számításánál a dinamika okán eddig szükséges kísérletezést, és olyan összefüggést találjon a kavics alaki jellemzői (oldalhossz, energiaszint, vonzástartomány) és a dinamikai folyamat végeredménye (oldalankénti relatív gyakoriság) között, aminek felhasználásával csak a morfológiai jellemzőket ismerve is meg tudjuk adni a kopásmodell bemenő paramétereit (egyes oldalak kopási valószínűségei, lényegében a relatív gyakoriságok).

A kavicsok modellezéséhez szükséges leképezéséhez részben a valóságban megfigyelhető okokból, részben az egyszerűsítés miatt közelítéseket alkalmaztunk. A modellünk 2 dimenzióban, homogén merev testnek tekintve, konvex poligonokkal helyettesíti a kavicsokat.

Első lépésben egy gyakorlatilag is kivitelezhető kísérletet futattunk le különböző oldalarányú fahasábokkal, amiben azt vizsgáltuk, hogy a hasábot százszor leejtve hogyan függ össze a hasáb oldalainak aránya az egyes oldalakon való megnyugvások számával, tehát az egyes oldalakra érkezés relatív gyakoriságával. Ennek eredményét felhasználva döntöttünk úgy, hogy a kutatást egy számítógépes szimulációval folytatjuk.

A program lényege az, hogy sokféle kiindulási alak esetén lefuttat egy leejtés – pattogás - megnyugvás ciklust, ezzel lényegében a kopást megelőző dinamikai folyamat végeredményét megadva. Ezt a szimulációt sokszor, sokféle alakra elvégezve egy olyan statisztikát kapunk, amiből már könnyen és nagy biztonsággal tudunk összefüggéseket keresni az alakfüggő és a dinamikafüggő paraméterek között. Az alakfüggő paraméterek közül várakozásaink szerint az egyes oldalak energiaszintjével, oldalhosszával és az oldalon található stabil egyensúlyi helyzet vonzástartományával lehet erős korrelációban a csupán dinamikafüggő paraméter,

az oldalon található stabil egyensúlyi pontban való megnyugvások relatív gyakoriságértéke. A poligon laposságától függően azonban ketté kell választani a lehetséges eseteket a poligon eltérő viselkedése miatt: körszerű és lapos testekre. Ez a továbbiakra nézve fontos momentum, mert a kapott eredményekben is megmutatkozik ez a kettősség.

A szimulációból kinyert adatok feldolgozása után az eredményeink azt mutatták, hogy várakozásainknak megfelelően, lapos test esetén az energiaszinttel és a vonzástartománnyal, körszerű esetben az oldalhosszal és a vonzástartománnyal is erős korrelációban van a relatív gyakoriság. Mivel mindkét esetben a vonzástartomány és a relatív gyakoriság korrelációja a legjobb, így a vonzástartomány az az alaki jellemző, amivel a kopásmodell inputját nagy valószínűséggel jól megadhatjuk. Ezzel sikerült célkitűzésünket teljesíteni, és kiküszöböltük a kopás vizsgálatánál eddig nélkülözhetetlen kísérletezést, hisz az erős korreláció miatt az egyes oldalakon található stabil egyensúlyi helyzet vonzástartományából viszonylag pontosan megadhatjuk az egyes oldalak leérkezéskori relatív gyakoriságát, azaz a kopási valószínűségi értékeit.

Érdekes még, hogy ez csak az 1 körüli laposságú esetben jelent lineáris összefüggést, lapos testek esetén inkább egy fix pont körüli sugárértéken belül szóródnak nagy sűrűséggel a mért értékek. Mivel ennek kezelése nehéz, a vizsgálódást már csak a körszerű testekre folytattuk. Megvizsgáltuk, hogy hogyan függ az ütközéskor elnyelődő energia százalékos nagyságától (rugalmas vagy rugalmatlan ütközés, k ütközési szám) az előbbi vonzástartomány – relatív gyakoriság korrelációs együtthatója. Ebben az esetben is olyan eredményt kaptunk, amit vártunk, mert ha $k=0$ (rugalmatlan ütközés) a korrelációs együttható értéke magas, és ahogy haladunk egyre nagyobb ütközési számértékek felé, fő tendenciáiban a függvény csökkenést mutat. Ha lineáris összefüggést feltételezünk erre a függvényre, akkor az egyébként nem triviális $k=1$ (teljesen rugalmas ütközés) pontban is becsülni tudjuk a korreláció értékét, ami egy újabb, előre nem várt eredménye munkánknak.

KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

Köszönjük Várkonyi Péternek és Domokos Gábornak, hogy az általuk kutatott, a témával kapcsolatos ismereteket a rendelkezésünkre bocsátották, és segítségükkel elméleti és gyakorlati szinten is nagymértékben hozzájárultak a dolgozatunk megszületéséhez!

IRODALOMJEGYZÉK

- [1] Mary C. Bourke and Heather A Viles: A Photographic Atlas of Rock Breakdown Features in Geomorphic Environments (Planetary Science Institute Tuscon, 2007)
- [2] Julie E. Laity, Nathan T. Bridges: Ventifacts on Earth and Mars: Analytical, field, and laboratory studies supportingsand abrasion and windward feature development (Geomorphology, 105, p 202-219, 2009)
- [3] G. Domokos, A. Á. Sipos, Gy. M. Szabó, P. L. Várkonyi: Formation of sharp edges and planar areas of asteroids by polyhedral abrasion, (The Astrophysical Journal Letters, 699, p 13-16, 2009)
- [4] Jasper Knight : The environmental significance of ventifacts: A critical review (Earth-Science Rewiews, 86, p 89-105, 2007)
- [5] M. S. Lorang, P. D. Komar: Pebble shape (Nature, 347, p 433-434, 1990)
- [6] Q. R. Wald: The form of pebbles (Nature, 345, p 211, 1990)
- [7] Ben Andrews: Gauss curvature flow: the fate of the rolling stones, (Inventiones mathematicae, 138, p 151–161, 1999)
- [8] polygeom.m [Geometry of a planar polygon] Matlab függvény, készítette: H. J. SOMMER III, letölthető a <http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/319> weblapról